

Symmetrische Funktionen

Adrian Fuchs

18. Juli 2017

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Grundsätzliche Definitionen und Bemerkungen	1
1.2	Erweiterung auf symmetrische Funktionen	2
1.3	Zahlenpartitionen	3
1.3.1	Darstellung von Partitionen	3
1.3.2	Rechenoperationen auf Partitionen	4
1.3.3	Ordnungen auf Partitionen	5
1.3.4	Schiefdiagramme und Tableaus	6
1.4	Grundfunktionen	7
1.4.1	Symmetrische Summen von Monomen	7
1.4.2	Elementarsymmetrische Funktionen	8
1.4.3	Vollständige symmetrische Funktionen	8
1.4.4	Potenzsummen	9
1.4.5	Schurfunktionen	10
2	Übergangsmatrizen	12
2.1	Übergangsmatrizen für kleine Dimensionen mit SageMath	16
3	Anwendungen symmetrischer Funktionen	22
3.1	Lösen von Polynomgleichungen, Satz von Vietá	22
3.2	Analyse von Bézier-Kurven	22

Kapitel 1

Einleitung

Zusammenfassung

Symmetrische Polynome bilden einen interessanten Teilring der Polynome in mehreren Variablen. Für jede Schranke $n \in \mathbb{N}$ bildet die Menge der symmetrischen Polynome mit Grad höchstens n einen endlichdimensionalen Vektorraum über dem Grundring. Zu diesem Vektorraum gibt es fünf kanonische Konstruktionen für eine Basis. Diese Arbeit befasst sich insbesondere mit der Basisumrechnung und den zugehörigen Basistransformationsmatrizen.

In der Fachbereichsarbeit[2] wurde mit kombinatorischen Argumenten eine Zeile der Transformationsmatrix zwischen Elementarsymmetrischen Funktionen und Potenzsummen hergeleitet. In dieser Arbeit wird mittels erzeugender Funktionen und Partitionen ein allgemeines Resultat hergeleitet, das auf I. G. Macdonald[3] zurückgeht.

Abschließend werden in Kapitel 2.1 für kleine Dimensionen die entsprechenden Übergangsmatrizen berechnet.

1.1 Grundsätzliche Definitionen und Bemerkungen

In diesem Abschnitt führen wir einige in der Algebra übliche sowie speziell in dieser Arbeit sinnvolle Definitionen und Notationen ein. Die hier verwendeten Begriffe und Zusammenhänge sind aus [3] sowie [1] übernommen. Detaillierte Herleitungen und Beweise sind in diesen Literaturquellen nachzuschlagen.

Definition 1.1 (Symmetrisches Polynom). Ein Polynom $p \in R[x_1, \dots, x_n]$ über einem kommutativen Ring R in den Variablen x_1, \dots, x_n heißt symmetrisch, wenn das Polynom invariant unter Vertauschung der Variablen ist, also wenn für jede Permutation $\sigma \in S_n$ gilt:

$$p(x_1, \dots, x_n) = (p \circ \sigma)(x_1, \dots, x_n) := p(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$$

Bemerkung 1.2. Die Menge der symmetrischen Polynome bilden einen Ring bezüglich der üblichen Additions- und Multiplikationsregeln für Polynome.

Beweis. Da die Menge der symmetrischen Polynome eine nicht leere Teilmenge aller Polynome ist, bleibt lediglich zu zeigen, dass Summen und Produkte symmetrischer Polynome wiederum symmetrisch sind. Das folgt direkt aus der Definition, Kommutativität und Assoziativität. \square

Notation 1.3. Anstatt der Variablen x_1, \dots, x_n schreiben wir in diesem Abschnitt kurz X . Für den Ring der symmetrischen Polynome über X schreiben wir $\Lambda[X]$, oder Λ_n ohne den Grundring R zu spezifizieren.

Definition 1.4 (Homogenes Polynom). Ein Polynom $p \in R[X]$ heißt homogen, wenn jedes nicht verschwindende Monom den gleichen Grad hat.

Für die additive Untergruppe von $\Lambda[X]$ der symmetrischen homogenen Polynome vom Grad n schreiben wir $\Lambda^n[X]$.

Jedes Polynom $p \in R[X]$ mit $\deg(p) = n$ lässt sich eindeutig als Summe $p = \sum_{i=1}^n p_i$, wobei $p_i \in R[X]$ ein homogenes Polynom vom Grad i ist, darstellen (man sortiert die Monome nach Graden). Daher genügt es, homogene Polynome zu verstehen.

Beispiel 1.5. Sei $n = 3$. Dann ist $p = x_1^2 + x_2^2 - x_3 \in \mathbb{Z}[X]$ kein symmetrisches Polynom, da es eine Permutation $\sigma \in S_3$ gibt, sodass $p \circ \sigma \neq p$. Beispielsweise ist $p \circ (1\ 2\ 3) = x_2^2 + x_3^2 - x_1^2 \neq p$.

Das Polynom $q = (x_1 + x_2 - 1)(x_2 + x_3 - 1)(x_3 + x_1 - 1) \in \mathbb{Z}[X]$ ist symmetrisch. Durch Ausmultiplizieren und Zusammenfassen der Terme erhält man die Zerlegung von q in homogene Polynome:

$$\begin{aligned} q_0 &= -1 \\ q_1 &= 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ q_2 &= -3x_1x_2 - 3x_2x_3 - 3x_3x_1 \\ q_3 &= x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_2^2x_1 + x_2^2x_3 + x_3^2x_1 + x_3^2x_2 + 2x_1x_2x_3 \end{aligned}$$

1.2 Erweiterung auf symmetrische Funktionen

Der Ring der symmetrischen Funktionen $\Lambda[X]$ ist von der Anzahl der Variablen $|X| = n$ abhängig. In diesem Unterabschnitt wollen wir den Ring der symmetrischen Funktionen Λ definieren, der von dieser Abhängigkeit befreit ist.

Seien $m \geq n$ natürliche Zahlen und $X_m = \{x_1, \dots, x_m\}$ und $X_n = \{x_1, \dots, x_n\}$. Dann ist die Einsetzungsabbildung, die in die Variablen x_{n+1}, \dots, x_m Null einsetzt, ein surjektiver Homomorphismus:

$$\rho_{m,n} : \begin{array}{ccc} \Lambda_m & \rightarrow & \Lambda_n \\ f(x_1, \dots, x_m) & \mapsto & f(x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0) \end{array}$$

Beschränkt man auf Λ_m^k bzw. Λ_n^k mit $k \leq n$, also auf symmetrische Polynome vom Grad höchstens k , dann ist $\rho_{m,n}$ sogar bijektiv, da ein Polynom in Λ_n^k kein Monom mehr als k Variablen enthalten kann. Damit können wir den Ring der symmetrischen Funktionen mit maximalem Grad k als Folge definieren:

Definition 1.6 (symmetrische Funktionen).

$$\Lambda^k = \{f = (f_n)_{n \geq 0} \mid f_n(X_n) \in \Lambda_n^k, \rho_{m,n}(f_m(X_n, 0, \dots, 0)) = f_n(X_n) \forall m \geq n\}$$

Die Menge der symmetrischen Funktionen mit beliebigem Grad definieren wir als direkte Summe:

$$\Lambda = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \Lambda^k$$

Bemerkung 1.7. Λ ist ein Ring. Λ^k ist im Allgemeinen kein Ring, da bei Multiplikation von Elementen die Grade addiert werden. Jedoch ist Λ^k ein freier R -Modul.

1.3 Zahlenpartitionen

Um Basen des R -Modul Λ^k anzugeben, benötigen wir einige Grundbegriffe und Zusammenhänge von Partitionen. Insbesondere werden die Übergangsmatrizen in Abschnitt 2 mit Zahlenpartitionen indiziert.

Definition 1.8 (Partition). Eine *Zahlenpartition* oder kurz *Partition* ist eine monoton fallende Folge $\lambda = (\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{N}_0^{\mathbb{N}}$, wobei nur endlich viele Einträge verschieden von null sind. Äquivalent ist die Bedingung $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i < \infty$.

In unserer Notation werden wir terminierende Nullen weglassen. Für $\lambda_i \neq 0$ und $\lambda_{i+1} = 0$ schreiben wir $\lambda = (\lambda_n)_{1 \leq n \leq i}$. Ist $m = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j = \sum_{j=1}^i \lambda_j$, so heißt λ eine *Partition von m* . Die Menge aller Partitionen wird mit \mathfrak{P} bezeichnet.

Die Menge aller Partitionen von n bezeichnen wir mit \mathfrak{P}_n .

Die Menge \mathfrak{P}_0 enthält nur eine Partition, nämlich die konstante Nullfolge. Wir notieren sie mit 0.

Definition 1.9 (Teile, Gewicht, Länge, Vielfachheit). Sei $\lambda = (\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathfrak{P}$. Dann heißen die λ_i mit $\lambda_i \neq 0$ *Teile* von λ .

Die Anzahl der Teile von λ , also $\max\{0, i \in \mathbb{N} : \lambda_i \neq 0\}$, heißt *Länge von λ* und wird $\text{len}(\lambda)$ geschrieben.

Die Summe aller Teile von λ , also $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i$, heißt *Gewicht von λ* und wird $|\lambda|$ geschrieben.

Die Anzahl der Teile von λ , die gleich i sind, also $|\{j \in \mathbb{N} | \lambda_j = i\}|$, heißt *Vielfachheit von i in λ* und wird $m_i = m_i(\lambda)$ geschrieben.

Notation 1.10. Für eine Partition $\lambda \in \mathfrak{P}$ schreiben wir auch $(1^{m_1(\lambda)} 2^{m_2(\lambda)} \dots)$, wobei es auf die Reihenfolge, in der die Teile angegeben werden, (meist aufsteigend oder absteigend) nicht ankommt. Vielfachheiten m_i mit $m_i = 1$ werden in der Notation vereinfacht, also statt i^{m_i} schreiben wir i . Vielfachheiten m_i mit $m_i = 0$ werden in der Notation weggelassen. Häufig werden auch die Klammern weggelassen.

Beispiel 1.11. Die Partition $\lambda = (5, 3, 3, 2, 1, 1, 1, 0, \dots)$ schreiben wir auch als $(53^2 21^3)$. Die Länge $\text{len}(\lambda)$ ist 7, denn λ hat sieben Teile, nämlich 5, 3, 3, 2, 1, 1, 1. Das Gewicht von λ ist $|\lambda| = 5 + 3 + 3 + 2 + 1 + 1 + 1 = 16$. Es ist also $\lambda \in \mathfrak{P}_{16}$. Für die Vielfachheiten gilt $m_1(\lambda) = 3, m_2(\lambda) = 1, m_3(\lambda) = 2, m_5(\lambda) = 1$ und $m_i(\lambda) = 0$ für alle $i \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2, 3, 5\}$.

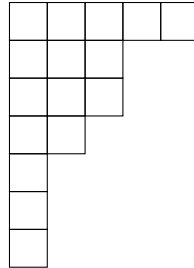
1.3.1 Darstellung von Partitionen

Definition 1.12 (Diagramm einer Partition). Für $\lambda = (\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathfrak{P}$ ist das *Diagramm von λ* die Menge der Punkte $\{(i, j) \in \mathbb{N}^2 | j \leq \lambda_i\}$.

Diagramme werden häufig nicht mittels Punkten, sondern mittels Quadraten dargestellt. Anstatt des Punkts (i, j) zeichnen wir das Quadrat mit den Eckpunkten $(i-1, j-1), (i, j-1), (i-1, j), (i, j)$. Dabei ist es üblich, die Koordinaten wie in Matrizen darzustellen. Die erste Koordinate (der Zeilenindex) wächst dabei nach unten und die zweite Koordinate (der Spaltenindex) wächst nach rechts. Die Teile von λ werden also zeilenweise aufgetragen.

Bemerkung 1.13. Es ist klar, dass jede Partition λ ein eindeutiges Diagramm M besitzt und dass jede endliche Teilmenge von $M \subset \mathbb{N}^2$ mit der Eigenschaft $(i, j) \in M \Rightarrow (i', j') \in M \forall i' \leq i, j' \leq j$ ein Diagramm einer Partition ist. Dabei ist $|\lambda| = |M|$ und $\text{len}(\lambda) = \max\{i \in \mathbb{N} \mid \exists j \in \mathbb{N} (i, j) \in M\}$

Beispiel 1.14. Das Diagramm der Partition $\lambda = (5, 3, 3, 2, 1, 1, 1, 0, \dots)$ stellen wir wie folgt dar:



1.3.2 Rechenoperationen auf Partitionen

Definition 1.15 (Konjugation von Partitionen). Sei $\lambda \in \mathfrak{P}$. Dann definieren wir die *zu λ konjugierte Partition* als $\lambda' = (\lambda'_i)_{i \in \mathbb{N}}$ mit $\lambda'_i = |\{j \in \mathbb{N} \mid \lambda_j \geq i\}|$.

Bemerkung 1.16. Die Konjugation einer Partition entspricht einer Spiegelung des Diagramms an der Hauptdiagonalen. Die Konjugation von Partitionen ist eine Involution, das heißt, $\lambda'' = \lambda$.

Definition 1.17 (Addition von Partitionen). Seien $\lambda, \mu \in \mathfrak{P}$. Dann definieren wir die *Summe* $\lambda + \mu$ komponentenweise, das heißt $(\lambda + \mu)_i = \lambda_i + \mu_i$ für $i \in \mathbb{N}$.

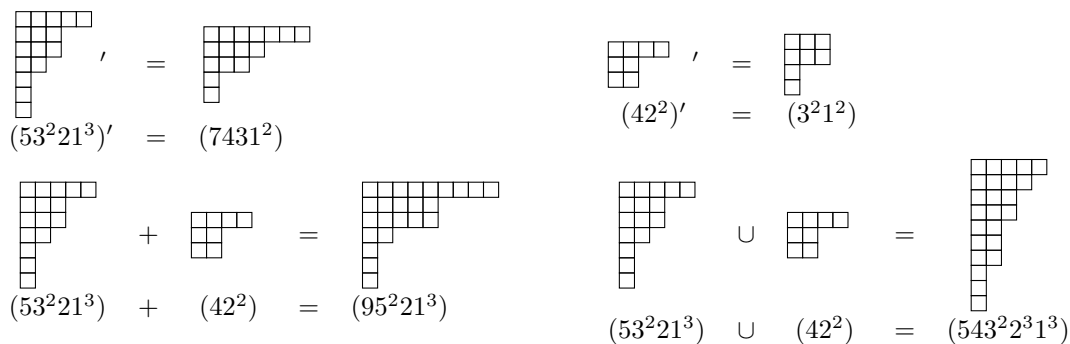
Definition 1.18 (Vereinigung von Partitionen). Seien $\lambda, \mu \in \mathfrak{P}$. Dann definieren wir die *Vereinigung* $\lambda \cup \mu$ als die Vereinigung aller Teile von λ und μ , sortiert in absteigender Reihenfolge.

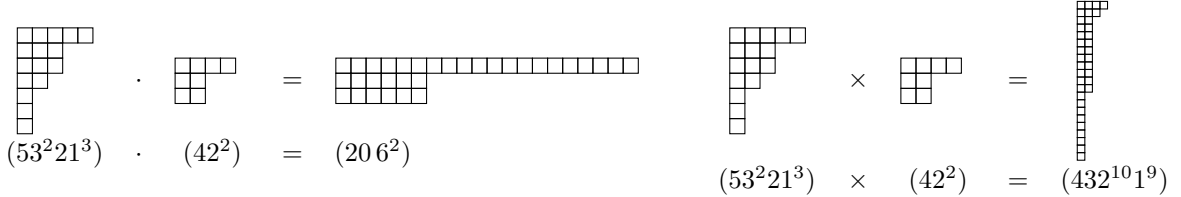
Definition 1.19 (komponentenweises Produkt von Partitionen). Seien $\lambda, \mu \in \mathfrak{P}$. Dann definieren wir das *komponentenweise Produkt* $\lambda \mu = \lambda \cdot \mu$ komponentenweise, das heißt $(\lambda \mu)_i = \lambda_i \mu_i$ für $i \in \mathbb{N}$.

Definition 1.20 (kartesisches Produkt von Partitionen). Seien $\lambda, \mu \in \mathfrak{P}$. Dann definieren wir das *kartesische Produkt* $\lambda \times \mu$ als Partition, deren Teile $\min(\lambda_i, \mu_j)$ sind, für alle $i, j \in \mathbb{N}$, wo dieses Minimum nicht verschwindet. Diese Partition ist aufgrund der Eigenschaft, dass Partitionen monoton fallende Folgen sind, eindeutig.

Lemma 1.21. Die Operationen $+$ und \cup sowie \cdot und \times sind bezüglich der Konjugation $'$ dual zueinander. Es gilt $(\lambda + \mu)' = \lambda' \cup \mu'$ und $(\lambda \mu)' = \lambda' \times \mu'$.

Beispiel 1.22. Wir betrachten die Partitionen $\lambda = (53^2 21^3)$ und $\mu = (42^2)$. Dann gilt





$$(53^2 21^3) \cdot (42^2) = (20 6^2) \quad (53^2 21^3) \times (42^2) = (432^{10} 1^9)$$

1.3.3 Ordnungen auf Partitionen

Um eine „Reihenfolge“ der Partitionen zu definieren, in der wir später in Abschnitt 2 die Matrizen indizieren werden, definieren wir zwei Ordnungsrelationen auf der Menge der Partitionen.

Definition 1.23 (umgekehrte lexikographische Ordnung der Partitionen). Seien $\lambda, \mu \in \mathfrak{P}$. Dann heißt λ (umgekehrt) *lexikographisch vor* μ , geschrieben $\lambda \geq_L \mu$, wenn die erste nicht verschwindende Differenz der geordneten Teile von λ und μ positiv ist.

$$\lambda \geq_L \mu \Leftrightarrow \lambda = \mu \vee \lambda_i - \mu_i > 0 \text{ für } i = \min\{j \in \mathbb{N} \mid \lambda_j \neq \mu_j\}$$

Die umgekehrte lexikographische Ordnung ist eine Totalordnung. Sie ist jedoch nicht verträglich mit der Konjugation, das heißt im Allgemeinen gilt weder $\lambda \geq_L \mu \Rightarrow \lambda' \geq_L \mu'$ noch $\lambda \geq_L \mu \Rightarrow \lambda' \leq_L \mu'$.

Definition 1.24 (natürliche Ordnung der Partitionen). Wir definieren

$$\lambda \geq \mu \Leftrightarrow \sum_{i=1}^k \lambda_i \geq \sum_{i=1}^k \mu_i \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Die natürliche Ordnung der Partitionen ist keine Totalordnung. Es gibt Partitionen, die bezüglich der natürlichen Ordnung nicht vergleichbar sind, selbst, wenn sie gleiches Gewicht haben. Beispielsweise gilt weder $(51^4) \geq (3^3)$ noch $(51^4) \leq (3^3)$.

Bemerkung 1.25. Häufig werden wir die obigen Ordnungsrelationen auf \mathfrak{P}_n auf ein gegebenes $n \in \mathbb{N}$ einschränken und nur Partitionen mit gleichem Gewicht vergleichen.

Satz 1.26. Für gegebenes $n \in \mathbb{N}$ invertiert die Konjugation die natürliche Ordnung auf den Partitionen von n . Für $\lambda, \mu \in \mathfrak{P}_n$ gilt die Äquivalenz $\lambda \geq \mu \Leftrightarrow \mu' \geq \lambda'$.

Beweis. Wir beweisen nur „ \Rightarrow “. Die andere Richtung folgt mittels Konjugation.

Wir nehmen an, dass $\lambda' \not\geq \mu'$ gilt. Das heißt, es existiert ein Index $k \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{i=1}^j \lambda'_i \leq \sum_{i=1}^j \mu'_i$ für alle $1 \leq j < k$, aber $\sum_{i=1}^k \lambda'_i > \sum_{i=1}^k \mu'_i$. Damit folgt insbesondere $\lambda'_k > \mu'_k$. Da die Summe aller Teile beider Partitionen λ und μ , sowie auch λ' und μ' gleich n sind, folgt $\sum_{i=k+1}^{\infty} \lambda'_i < \sum_{i=k+1}^{\infty} \mu'_i$.

In den Summen werden die Punkte (oder Quadrate) gezählt, die rechts der k -ten Spalte liegen. Gehen wir zur transponierten Partition über, zählen wir die Punkte, die unterhalb der k -ten Zeile liegen. Damit bekommen wir die äquivalente Ungleichung $\sum_{j=1}^{\lambda'_k} (\lambda_j - k) < \sum_{j=1}^{\mu'_k} (\mu_j - k)$.

Die linke Seite kann weiter mit $\sum_{j=1}^{\mu'_k} (\lambda_j - k)$ abgeschätzt werden, da $\lambda'_k > \mu'_k$ gilt. Dies impliziert jedoch $\sum_{j=1}^{\mu'_k} \lambda_j < \sum_{j=1}^{\mu'_k} \mu_j$, und damit $\lambda \not\geq \mu$. \square

Bemerkung 1.27. Dieser Satz funktioniert nicht, wenn man Partitionen mit unterschiedlichem Gewicht vergleicht. Beispielsweise ist $(21) \geq (1)$, offensichtlich gilt jedoch nicht $(1)' \geq (21)'$, da die Partitionen selbstkonjugiert und verschieden sind. Für $\lambda, \mu \in \mathfrak{P}$ gilt jedoch die Implikation $\lambda \geq \mu \Rightarrow |\lambda| \geq |\mu|$.

1.3.4 Schiefdiagramme und Tableaus

Definition 1.28 (Schiefdiagramm). Seien $\lambda, \mu \in \mathfrak{P}$. Wir schreiben $\lambda \supset \mu$, wenn diese Mengeneinklusion für die Diagramme der Partitionen gilt. In diesem Fall definieren wir $\lambda - \mu := \lambda \setminus \mu$ das *Schiefdiagramm* zu λ und μ .

Das zu $\lambda - \mu$ *konjugierte Schiefdiagramm* ist $(\lambda - \mu)' = \lambda' - \mu'$.

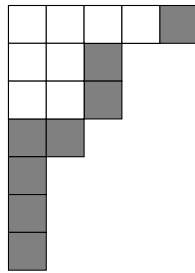
Das *Gewicht eines Schiefdiagramms* $|\lambda - \mu|$ ist die Differenz der Gewichte von $|\lambda| - |\mu|$ bzw. die Mächtigkeit der Menge als Diagramm.

Die *Teile eines Schiefdiagramms* sind die Differenzen der Teile der Partitionen in absteigender Reihenfolge: $(\lambda - \mu)_i = \lambda_i - \mu_i$. Achtung: im Gegensatz zu Partitionen charakterisieren die Teile das Schiefdiagramm nicht eindeutig.

Ein Schiefdiagramm $\lambda - \mu$ heißt ein *horizontaler (vertikaler) Streifen bzw. m -Streifen*, wenn $m = |\lambda - \mu|$ und für jedes $i \in \mathbb{N}$ gilt $(\lambda - \mu)'_i \leq 1$ ($(\lambda - \mu)_i \leq 1$).

Im Spezialfall $\mu = 0$ identifizieren wir das Schiefdiagramm $\lambda - 0$ mit der Partition λ .

Beispiel 1.29. Die grauen Quadrate entsprechen dem Schiefdiagramm $\lambda - \mu$ der Partitionen $\lambda = (53^221^3)$ und $\mu = (42^2)$



Definition 1.30 (Tableau). Seien $\lambda, \mu \in \mathfrak{P}$ mit $\lambda \supset \mu$. Ein *Tableau T von λ und μ* ist eine endliche Folge von Partitionen $T = (\lambda^{(0)}, \dots, \lambda^{(r)})$ mit der Eigenschaft

$$\mu = \lambda^{(0)} \subset \dots \subset \lambda^{(r)} = \lambda$$

Ein Tableau heißt *spaltenstrikt (zeilenstrikt)* wenn jedes Schiefdiagramm $\lambda^{(i)} - \lambda^{(i-1)}$ für $i \in \{1, \dots, r\}$ ein horizontaler (vertikaler) Streifen ist.

Das Schiefdiagramm $\lambda - \mu$ heißt *Form* von T .

Die Folge $(|\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}|, |\lambda^{(2)} - \lambda^{(1)}|, \dots, |\lambda^{(r)} - \lambda^{(r-1)}|)$ heißt *Gewicht* von T . Wenn diese Folge monoton fällt, ist sie zugleich eine Partition.

Eine platzsparende, einfache und eindeutige Notation für Tableaus erhält man, in dem man die Zahl i in jedes Quadrat des Schiefdiagramms $\lambda^{(i)} - \lambda^{(i-1)}$ schreibt.

Beispiel 1.31.

$$T = (2^21, 42^21, 5321^2, 532^21^2, 53^221^3)$$

Die leeren Quadrate entsprechen der Partition μ . Alle Quadrate (ausgefüllte und leere) entsprechen der Partition λ . Die ausgefüllten Quadrate entsprechen der Form von T , also dem Schiefdiagramm $\lambda - \mu$. Die Folge $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ der Anzahl a_i der Zahlen i im Diagramm entspricht dem Gewicht von T . In diesem Fall ist das Gewicht von T eine Partition, nämlich (432^2) .

Das Tableau ist spaltenstrikt: In jeder Spalte sind die Zahlen nach unten streng monoton wachsend, jede Zahl kommt pro Spalte höchstens ein Mal vor. Es ist jedoch nicht zeilenstrikt: In der ersten Zeile kommt der Eintrag 1 zwei Mal vor.

		1	1	2
		2		
	1	4		
1	3			
2				
3				
4				

Bemerkung 1.32. Wenn $\mu = 0$ gilt, können in einem spaltenstrikten Tableau in der i -ten Zeile nur Zahlen auftreten, die größer oder gleich i sind. Damit folgt: Wenn die Form von T eine Partition $\lambda \in \mathfrak{P}_n$ ist und das Gewicht ebenfalls eine Partition $\mu \in \mathfrak{P}_n$, dann gilt $\lambda \geq \mu$.

1.4 Grundfunktionen

In diesem Kapitel werden wir sechs Basen von Λ angeben. Diese Basen werden im Kapitel 2 verglichen.

1.4.1 Symmetrische Summen von Monomen

Definition 1.33 (Symmetrische Summe von Monomen). Sei $\lambda \in \mathfrak{P}$. Dann definieren wir

$$m_\lambda = \sum_{\alpha} \prod_{i=1}^{\infty} x_i^{\alpha_i} \in \Lambda$$

wobei die Summe über alle Folgen $\alpha = (\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}$ läuft, die eine Permutation der Partition λ sind.

Da Partitionen nur endlich viele Nichtnulleinträge haben, gilt dies auch für Permutationen von Partitionen, womit das Produkt $\prod_{i=1}^{\infty} x_i^{\alpha_i}$ erklärt ist.

Bemerkung 1.34. m_λ enthält genau jene Monome, deren Exponenten in absteigender Reihenfolge der Partition λ entsprechen. Dabei hat jedes Monom den Koeffizienten 1. Der Grad von m_λ ist daher $|\lambda|$.

Beispiel 1.35.

$$m_{(21^2)} = x_1^2 x_2 x_3 + x_1 x_2^2 x_3 + x_1 x_2 x_3^2 + x_1^2 x_2 x_4 + \dots$$

Mittels Koeffizientenvergleich sieht man leicht, dass $\{m_\lambda | \lambda \in \mathfrak{P}\}$ eine Basis von Λ als R -Modul ist.

Lemma 1.36 (Multiplikation von symmetrischen Summen von Monomen). Seien $\lambda, \mu \in \mathfrak{P}$. Dann ist $m_\lambda \cdot m_\mu \in \Lambda^{|\lambda|+|\mu|}$ und es gilt

$$m_\lambda \cdot m_\mu = \sum_{\nu \in \mathfrak{P}_{|\lambda|+|\mu|}, \nu \leq \lambda + \mu} \alpha_{\lambda, \mu, \nu} m_\nu$$

Dabei sind die Koeffizienten $\alpha_{\lambda, \mu, \nu} \in \mathbb{N}_0$ die Anzahl der Möglichkeiten, die Punkte des Diagramms von ν so mit zwei Farben \bullet und \bullet zu färben, dass in jeder Zeile \bullet gefärbte Punkte immer links

von \bullet gefärbten Punkten sind (also $\forall i, j_1, j_2$ gilt die Implikation (i, j_1) hat \bullet und (i, j_2) hat $\bullet \Rightarrow j_1 < j_2$) und die zeilenweisen Anzahlen der \bullet gefärbten Punkte eine Permutation von λ und die zeilenweisen Anzahlen der \circ gefärbten Punkte eine Permutation von μ ist.

Beweis. Dies ergibt sich direkt durch Ausmultiplizieren und Zusammenfassen der Monome. \square

Beispiel 1.37. Wir wählen $\lambda = (21^2), \mu = (2^2)$. Dann ist

$$m_{(21^2)} \cdot m_{(2^2)} = m_{(431)} + m_{(421^2)} + m_{(3^22)} + 2m_{(32^21)} + 3m_{(2^31^2)}$$

1.4.2 Elementarsymmetrische Funktionen

Definition 1.38 (Elementarsymmetrische Funktionen). Für $r \in \mathbb{N}$ definieren wir die r -te elementarsymmetrische Funktion als

$$e_r = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_r} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_r} = m_{(1^r)}$$

Weiters definieren wir $e_0 = 1$.

Für eine Partition $\lambda = (\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}}$ definieren wir $e_\lambda = \prod_{i=1}^\infty e_{\lambda_i}$. Alle bis auf endlich viele Faktoren sind 1, daher ist dieses Produkt erklärt.

Satz 1.39 (Hauptsatz über symmetrische Funktionen). Die elementarsymmetrischen Funktionen bilden eine weitere Basis von Λ . Jede symmetrische Funktion besitzt eine eindeutige Darstellung als Polynom über den Elementarsymmetrischen Funktionen.

Genauer gilt: Für $n \in \mathbb{N}, \lambda \in \mathfrak{P}_n$ existieren $a_{\lambda, \mu} \in \mathbb{N}_0$ für alle $\mu \in \mathfrak{P}_n$ mit $\mu < \lambda$, sodass

$$e_{\lambda'} = m_\lambda + \sum_{\mu < \lambda} a_{\lambda, \mu} m_\mu$$

Beweis. Die erste Behauptung folgt durch Auflösen des Gleichungssystems nach m_μ und der Tatsache, dass die m_μ eine Basis bilden, aus der zweiten.

Die zweite Behauptung folgt, indem wir die linke Seite der postulierten Gleichung $e_{\lambda'}$ nach der Definition als Produkt elementarsymmetrischer Funktionen $\prod_{i=1}^\infty e_{\lambda'_i} = \prod_{i=1}^\infty m_{(1^{\lambda'_i})}$ mit Hilfe von Lemma 1.36 ausmultipliziert. Der Koeffizient bei m_λ ist 1, da die Färbung für $\nu = \lambda + \mu$ eindeutig ist. \square

1.4.3 Vollständige symmetrische Funktionen

Definition 1.40. Sei $r \in \mathbb{N}$. Dann ist die n -te vollständige symmetrische Funktion h_r , die Summe aller Monome vom Grad r .

$$h_r = \sum_{\lambda \in \mathfrak{P}_r} m_\lambda$$

Analog zu den elementarsymmetrischen Funktionen definieren wir für $\mu \in \mathfrak{P}$

$$h_\mu = \prod_{i=1}^\infty h_{\mu_i}$$

Satz 1.41. *Es ist $\Lambda = R[h_1, h_2, \dots]$. Insbesondere ist $(h_\lambda)_{\lambda \in \mathfrak{P}}$ eine Basis von Λ als R -Modul.*

Beweis. Sei $E(t) = \sum_{i=0}^{\infty} e_i t^i \in \Lambda[[t]]$ die erzeugende Funktion der elementarsymmetrischen Funktionen. Durch Ausmultiplizieren ergibt sich $E(t) = \prod_{i=1}^{\infty} (1 + x_i t)$.

Sei weiters $H(t) = \sum_{i=0}^{\infty} h_i t^i \in \Lambda[[t]]$ die erzeugende Funktion der vollständigen symmetrischen Funktionen. Dann gilt:

$$H(t) = \prod_{i=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} x_i^k t^k = \prod_{i=1}^{\infty} (1 - x_i t)^{-1}$$

Damit ergibt sich $H(t)E(-t) = 1$. Ausmultiplizieren und Koeffizientenvergleich liefert folgendes Gleichungssystem:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{r=0}^n (-1)^r e_r h_{n-r} = 0$$

Löst man dieses Gleichungssystem nach den Variablen $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$, erhält man eine Darstellung der elementarsymmetrischen Polynome – die eine Basis sind – in vollständigen symmetrischen Polynomen. \square

Definition 1.42. Wir definieren einen Endomorphismus auf Λ durch

$$\omega : \begin{array}{ccc} \Lambda & \rightarrow & \Lambda \\ e_r & \mapsto & h_r \end{array} \quad \forall r \geq 0$$

Aufgrund der Symmetrie der Gleichung $H(t)E(-t) = 1$ ist ω eine Involution, es gilt also $\omega^2 = \text{id}_\Lambda$, bzw. $\omega^{-1} = \omega$. Daher ist ω sogar ein Automorphismus.

Die Basen $(e_\lambda)_{\lambda \in \mathfrak{P}}$ und $(h_\lambda)_{\lambda \in \mathfrak{P}}$ entsprechen einander unter der Involution ω . Analog können wir eine der symmetrischen Summe von Monomen entsprechenden Basis definieren:

Definition 1.43 (Forgotten Basis). Sei $f_\lambda = \omega(m_\lambda)$ für $\lambda \in \mathfrak{P}$. Dann bilden $(f_\lambda)_{\lambda \in \mathfrak{P}}$ eine Basis von Λ , genannt die *vergessene Basis* oder *forgotten Basis*.

Wir erhalten damit Entsprechungen unter ω :

$$\begin{array}{ccc} e_\lambda & \xleftrightarrow{\omega} & h_\lambda \\ m_\lambda & \xleftrightarrow{\omega} & f_\lambda \end{array}$$

1.4.4 Potenzsummen

Definition 1.44 (Potenzsummen). Sei $r \in \mathbb{N}$. Dann definieren wir die r -te *Potenzsumme* als

$$p_r = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^r$$

Für eine Partition $\lambda = (\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathfrak{P}$ definieren wir

$$p_\lambda = \prod_{i \in \mathbb{N}, \lambda_i \neq 0} p_{\lambda_i}$$

Lemma 1.45. *Wenn in R alle Summen $\sum_{i=1}^n 1_R$ für $n \in \mathbb{N}$ Einheiten sind, bilden die Funktionen $(p_\lambda)_{\lambda \in \mathfrak{P}}$ bilden eine Basis von Λ als R -Modul.*

Beweis. Sei $P(t) = \sum_{r=1}^{\infty} p_r t^{r-1} \in \Lambda[[t]]$. Dann gilt $P(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} x_i^r t^{r-1} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{1-x_i t} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d}{dt} \log\left(\frac{1}{1-x_i t}\right) = \frac{d}{dt} \log\left(\prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1-x_i t}\right) = \frac{d}{dt} \log(H(t)) = \frac{H'(t)}{H(t)}$

Durch Koeffizientenvergleich folgt $nh_n = \sum_{r=1}^n p_r h_{n-r}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, womit sich h_n durch p_1, \dots, p_n und umgekehrt p_n durch h_1, \dots, h_n ausdrücken lässt. □

Weiters gilt $P(-t) = \frac{d}{dt} \log(H(-t)) = \frac{d}{dt} \log(E(t)^{-1}) = -\frac{E'(t)}{E(t)}$

Analog gilt $ne_n = \sum_{r=1}^n (-1)^{r-1} p_r e_{n-r}$. Dieser Zusammenhang heißt auch *Newtonsche Formel*.

Da die Involution ω die erzeugenden Funktionen $E(t)$ und $H(t)$ vertauscht, gilt $\omega(p_n) = (-1)^{n-1} p_n$ für $n \in \mathbb{N}$ und allgemeiner $\omega(p_\lambda) = \varepsilon_\lambda p_\lambda$ mit $\varepsilon_\lambda = (-1)^{|\lambda| - \text{len}(\lambda)}$ für $\lambda \in \mathfrak{P}$.

Um die vollständigen symmetrischen Funktionen und elementarsymmetrischen Funktionen als Linearkombinationen der p_λ auszudrücken, definieren wir für $\lambda \in \mathfrak{P}$

$$z_\lambda = \prod_{i=1}^{\infty} i^{m_i} m_i!$$

wobei $m_i = m_i(\lambda)$ die Anzahl der Teile von λ sind, die gleich i sind. Umformung der obigen Potenzreihengleichung nach $H(t)$ liefert:

$$H(t) = \exp\left(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{p_r t^r}{r}\right) = \prod_{r=1}^{\infty} \exp\left(\frac{p_r t^r}{r}\right) = \prod_{r=1}^{\infty} \sum_{m_r=0}^{\infty} \frac{(p_r t^r)^{m_r}}{r^{m_r} m_r!} = \sum_{\lambda \in \mathfrak{P}} z_\lambda^{-1} p_\lambda t^{|\lambda|}$$

Damit erhalten wir die gewünschten Darstellungen von $H(t)$ und $E(t)$ mittels p_λ :

$$\begin{aligned} H(t) &= \sum_{\lambda \in \mathfrak{P}} z_\lambda^{-1} p_\lambda t^{|\lambda|} & E(t) &= \sum_{\lambda \in \mathfrak{P}} \varepsilon_\lambda z_\lambda^{-1} p_\lambda t^{|\lambda|} \\ h_n &= \sum_{\lambda \in \mathfrak{P} \mid |\lambda|=n} z_\lambda^{-1} p_\lambda & e_n &= \sum_{\lambda \in \mathfrak{P} \mid |\lambda|=n} \varepsilon_\lambda z_\lambda^{-1} p_\lambda \end{aligned}$$

1.4.5 Schurfunktionen

Definition 1.46. Für $n \in \mathbb{N}$ und $\alpha \in \mathfrak{P}$ mit $\text{len}(\alpha) \leq n$ definieren wir

$$a_\alpha = a_\alpha(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \text{sgn}(\sigma) \sigma(x^\alpha) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_{\sigma(i)}}$$

Dabei bezeichnet \mathcal{S}_n die symmetrische Gruppe und $\text{sgn}(\sigma)$ ist das Vorzeichen der Permutation σ .

Ein Polynom a_α ist schiefssymmetrisch, das heißt es gilt $\sigma(a_\alpha) = \text{sgn}(\sigma) a_\alpha$ für $\sigma \in \mathcal{S}_n$. Damit ist $a_\alpha = 0$, wenn die Teile von α nicht paarweise verschieden sind. Daher werden wir nur jene α mit $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_n$ betrachten. Dann lässt sich α in $\alpha = \lambda + \delta$ zerlegen mit $\lambda \in \mathfrak{P}$ und $\text{len}(\lambda) \leq n$ und $\delta = (n-1, n-2, \dots, 1, 0, 0, \dots)$. Mit dieser Zerlegung gilt:

$$a_\alpha = a_{\lambda+\delta} = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \text{sgn}(\sigma) \sigma(x^{\lambda+\delta}) = \det(x_i^{\lambda_j+n-j})_{1 \leq i, j \leq n}$$

Diese Determinante ist durch die Vandermondesche Determinante, also dem Produkt aller Differenzen $a_\delta = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)$ teilbar.

Definition 1.47 (Schurfunktionen). Für $\lambda \in \mathfrak{P}$ ist die *Schurfunktion* in n Variablen ist gegeben durch $s_\lambda(x_1, \dots, x_n) = \frac{a_{\lambda+\delta}}{a_\delta} \in \Lambda^n$. Die *Schurfunktion* $s_\lambda \in \Lambda$ ist durch die Bijektion aus Kapitel 1.2 gegeben.

Lemma 1.48. Die Schurfunktion $(s_\lambda)_{\lambda \in \mathfrak{P}}$ bilden eine Basis von Λ als R -Modul.

Beweis. Sei A_n der Ring der schiefsymmetrischen Polynome über den Variablen x_1, \dots, x_n . Dann ist $(a_{\lambda+\delta})_{\lambda \in \mathfrak{P}, \text{len}(\lambda) \leq n}$ eine Basis von A_n . Die Abbildung

$$\begin{aligned} \Lambda^n &\rightarrow A_n \\ s_\lambda &\mapsto s_\lambda a_\delta = a_{\lambda+\delta} \end{aligned}$$

ist ein Isomorphismus.

Ist $\text{len}(\alpha) \leq n$, dann gilt $a_\alpha(x_1, \dots, x_n) = a_\alpha(x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0)$. Daraus folgt mit dem im Abschnitt 1.2 definierten Isomorphismus ρ :

$$\rho_{n+1,n}(s_\lambda(x_1, \dots, x_{n+1})) = s_\lambda(x_1, \dots, x_n)$$

Wenn n groß genug ist, wird so ein eindeutiges homogenes $s_\lambda \in \Lambda$ vom Grad $|\lambda|$ definiert. \square

Man kann zeigen, dass für $\lambda \in \mathfrak{P}$ und $m, n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq \text{len}(\lambda)$ und $m \geq \text{len}(\lambda')$ gilt:

$$s_\lambda = \det(h_{\lambda_i - i + j})_{1 \leq i, j \leq n} = \det(e_{\lambda'_i - i + j})_{1 \leq i, j \leq m}$$

Damit folgt $\omega(s_\lambda) = s_{\lambda'}$.

Definition 1.49 (Skalarprodukt). Wir definieren auf Λ eine R -wertige Bilinearform durch

$$\langle h_\lambda, m_\mu \rangle = \delta_{\lambda, \mu} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } \lambda = \mu \\ 0 & \text{wenn } \lambda \neq \mu \end{cases}$$

Dann folgt (hier ohne Beweis):

$$\langle p_\lambda, p_\mu \rangle = \delta_{\lambda, \mu} z_\lambda \qquad \langle s_\lambda, s_\mu \rangle = \delta_{\lambda, \mu}$$

und die Bilinearform ist symmetrisch und positiv definit. Weiters ist ω eine Isometrie auf der Bilinearform.

Kapitel 2

Übergangsmatrizen

Im folgenden Kapitel sind die Matrizen mit in umgekehrter lexikographischer Reihenfolge geordneter Partitionen indiziert. Also die erste Zeile/Spalte steht für (n) und die letzte für (1^n) . Für die Menge aller solcher Matrizen über einem Grundkörper oder Ring K schreiben wir $K^{\mathfrak{P}_n \times \mathfrak{P}_n}$.

Definition 2.1 (strikte obere Dreiecksmatrix).

- Eine Matrix $M_{\lambda,\mu}$ heißt *strikte obere Dreiecksmatrix* oder *strenge obere Dreiecksmatrix*, wenn für alle Partitionen λ, μ von n die Implikation $\lambda < \mu \Rightarrow M_{\lambda,\mu} = 0$ gilt.
- Gilt zusätzlich $M_{\lambda,\lambda} = 1$ für alle Partitionen λ , dann heißt M *strikte obere uniforme Dreiecksmatrix*.
- Analog definieren wir die Begriffe *strikte untere Dreiecksmatrix* und *strikte untere uniforme Dreiecksmatrix*.

Notation und Lemma 2.2. Wir schreiben U_n für die Menge aller ganzzahligen strikten uniformen oberen Dreiecksmatrizen und U'_n für die Menge aller ganzzahligen strikten uniformen unteren Dreiecksmatrizen. Dann sind U_n und U'_n Gruppen bezüglich Matrixmultiplikation.

Beweis. Seien $M, N \in U_n$. Dann ist

$$(MN)_{\lambda,\mu} = \sum_{\nu \in \mathfrak{P}_n} M_{\lambda,\nu} N_{\nu,\mu}$$

Damit ein Summand der rechten Seite nicht verschwindet, muss $\lambda \geq \nu$ und $\nu \geq \mu$ gelten. Dies impliziert jedoch $\lambda \geq \mu$. Für $\lambda < \mu$ gilt daher $M_{\lambda,\mu} = 0$.

Für $\lambda = \mu$ gibt es genau einen nicht verschwindenden Summanden bei $\nu = \lambda$, nämlich $M_{\lambda,\lambda} N_{\lambda,\lambda} = 1$.

Offensichtlich ist $E_{\lambda,\mu} = \delta_{\lambda,\mu}$ das neutrale Element in U_n . Die Argumentation für U'_n geht analog.

Um den Beweis zu vervollständigen ist zu zeigen, dass in U_n Inverse existieren. Sei $M \in U_n$. Für alle rechte-Seite Vektoren $(y_\lambda)_{\lambda \in \mathfrak{P}_n}$ ist das Gleichungssystem

$$\forall \lambda \in \mathfrak{P}_n : \sum_{\mu \in \mathfrak{P}_n} M_{\lambda,\mu} x_\mu = y_\lambda$$

äquivalent zu:

$$\forall \lambda \in \mathfrak{P}_n : \sum_{\mu \in \mathfrak{P}_n} (M^{-1})_{\lambda,\mu} y_\mu = x_\lambda$$

Im oberen Gleichungssystem kommen für $\lambda, \nu \in \mathfrak{P}_n$ mit $\nu \leq \lambda$ nur jene x_μ vor, für die $\mu \leq \nu$ gilt, also insbesondere nur jene mit $\mu \leq \lambda$. Damit folgt aus dem zweiten Gleichungssystem, dass für $\lambda < \mu$ gilt $(M^{-1})_{\lambda, \mu} = 0$. Damit folgt $M^{-1} \in U_n$. \square

Notation 2.3. Sei J die Transpositionsmatrix, also jene Matrix, die den Einheitsvektor einer Partition auf den Einheitsvektor der transponierten Matrix abbildet. Es gilt:

$$J_{\lambda, \mu} = \begin{cases} 1 & \text{für } \lambda' = \mu \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Insbesondere gilt $J = J' = J^* = J^{-1}$.

Satz 2.4. Eine Matrix M ist genau dann eine strikte obere (uniforme) Dreiecksmatrix, wenn JMJ eine strikte untere (uniforme) Dreiecksmatrix ist.

Beweis. Nach Definition ist $(JMJ)_{\lambda, \mu} = M_{\mu', \lambda'}$. Aufgrund der Äquivalenz von $\lambda' \geq \mu' \Leftrightarrow \mu \geq \lambda$ aus Satz 1.26 folgt das zu zeigende. \square

Definition 2.5 (Übergangsmatrix). Für zwei \mathbb{Q} -Basen $(u_\lambda)_{\lambda \in \mathfrak{P}_n}$ und $(v_\lambda)_{\lambda \in \mathfrak{P}_n}$ von Λ^n sei $M(u, v)$ die Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems

$$\forall \lambda \in \mathfrak{P}_n : \sum_{\mu \in \mathfrak{P}_n} M(u, v)_{\lambda, \mu} v_\mu = u_\lambda$$

Dann heißt $M(u, v)$ die *Übergangsmatrix* von der Basis $(u_\lambda)_{\lambda \in \mathfrak{P}_n}$ in die Basis $(v_\lambda)_{\lambda \in \mathfrak{P}_n}$. Offensichtlich ist $M(u, v) \in \mathbb{Q}^{\mathfrak{P}_n \times \mathfrak{P}_n}$ regulär.

Lemma 2.6. Seien $(u_\lambda)_{\lambda \in \mathfrak{P}_n}$, $(v_\lambda)_{\lambda \in \mathfrak{P}_n}$ und $(w_\lambda)_{\lambda \in \mathfrak{P}_n}$ \mathbb{Q} -Basen von Λ^n . Dann gilt:

1. $M(u, v)M(v, w) = M(u, w)$
2. $M(u, v) = M(v, u)^{-1}$
3. Wenn $(u'_\lambda)_{\lambda \in \mathfrak{P}_n}$, $(v'_\lambda)_{\lambda \in \mathfrak{P}_n}$ duale Basen zu $(u_\lambda)_{\lambda \in \mathfrak{P}_n}$, $(v_\lambda)_{\lambda \in \mathfrak{P}_n}$ bezüglich dem Skalarprodukt aus Definition 1.49 sind, dann gilt $M(u', v') = M(v, u)' = M(u, v)^*$.
4. Für die Involution ω aus Definition 1.42 gilt $M(\omega u, \omega v) = M(u, v)$.

Beweis. Diese Tatsachen folgen aus der linearen Algebra sowie der Definition von ω . \square

Mit diesen Erkenntnissen können wir nun die Übergangsmatrizen der Basen aus dem Abschnitt 1.4 herleiten. Alle diese können mithilfe von einer Matrix $K = M(s, m)$ und der oben definierten Matrix J ausgedrückt werden. Für kleine n ist die Matrix K in Kapitel 2.1 berechnet.

Da $(m_\lambda)_{\lambda \in \mathfrak{P}_n}$ und $(h_\lambda)_{\lambda \in \mathfrak{P}_n}$ zueinander duale Basen sind, und $(s_\lambda)_{\lambda \in \mathfrak{P}_n}$ selbstdual ist, gilt $M(s, h) = M(s', m') = M(s, m)^* = K^*$.

Da $\omega(s_\lambda) = s_{\lambda'}$ gilt, folgt $M(\omega s, s) = J$. Weiters gilt aufgrund der Dualitäten:

$$M(s, e) = M(\omega s, h) = M(\omega s, s)M(s, h) = JK^*$$

und weiters

$$M(s, f) = M(s, e)^* = (JK^*)^* = JK$$

In der folgenden Tabelle sind die Übergangsmatrizen der Basen $(e_\lambda)_{\lambda \in \mathfrak{P}_n}$, $(h_\lambda)_{\lambda \in \mathfrak{P}_n}$, $(m_\lambda)_{\lambda \in \mathfrak{P}_n}$, $(f_\lambda)_{\lambda \in \mathfrak{P}_n}$ und $(s_\lambda)_{\lambda \in \mathfrak{P}_n}$ von Λ^n , ausgedrückt durch J und K gegeben: Es gibt eine kombinatorische

	e	h	m	f	s
e	1	$K'JK^*$	$K'JK$	$K'K$	$K'J$
h	$K'JK^*$	1	$K'K$	$K'JK$	K'
m	$K^{-1}JK^*$	$K^{-1}K^*$	1	$K^{-1}JK$	K^{-1}
f	$K^{-1}K^*$	$K^{-1}JK^*$	$K^{-1}JK$	1	$K^{-1}J$
s	JK^*	K^*	K	JK	1

Tabelle 2.1: Übergangsmatrizen

Interpretation der Matrix K : Der Eintrag $K_{\lambda,\mu}$ ist die Anzahl der Tableaus der Form λ mit Gewicht μ . Damit ergibt sich auch der folgende Satz:

Lemma 2.7. Für Partitionen $\lambda, \mu \in \mathfrak{P}_n$ ist $K_{\lambda,\mu}$ die Anzahl der spaltenstrikten Tableaus der Form λ mit Gewicht μ .

Satz 2.8. Die Matrix K ist eine strikte obere uniforme Dreiecksmatrix.

Beweis. Sei T ein spaltenstriktes Tableau mit Form $\lambda \in \mathfrak{P}_n$ und Gewicht $\mu \in \mathfrak{P}_n$. Dann gibt es $\mu_1 + \dots + \mu_r$ Einträge (wenn man die Notation mit den Zahlen in den Quadraten verwendet) in T , die $\leq r$ sind. Diese müssen sich in den oberen r Zeilen von T befinden, da die Spalten streng ansteigen. Damit folgt $\sum_{i=1}^r \mu_i \leq \sum_{i=1}^r \lambda_i$ für alle $r \in \mathbb{N}$, also $\mu \leq \lambda$. Also kann $K_{\lambda,\mu} \neq 0$ nur für $\lambda \geq \mu$ eintreten. Mit dem selben Argument erhalten wir $K_{\lambda,\lambda} = 1$. \square

Korollar 2.9.

- $M(s, h)$ und $M(h, s)$ sind strikte untere uniforme Dreiecksmatrizen.
- $M(s, m)$ und $M(m, s)$ sind strikte obere uniforme Dreiecksmatrizen.
- $M(e, m) = M(h, f)$ ist symmetrisch.
- $M(e, f) = M(h, m)$ ist symmetrisch.
- $M(e, h) = M(h, e) = M(m, f)' = M(f, m)'$
- $M(h, s) = M(s, m)'$
- $M(e, s) = M(s, f)'$

Mit den bisherigen Überlegungen verstehen wir paarweise die Übergangsmatrizen für die Basen $(e_\lambda)_{\lambda \in \mathfrak{P}_n}$, $(h_\lambda)_{\lambda \in \mathfrak{P}_n}$, $(m_\lambda)_{\lambda \in \mathfrak{P}_n}$, $(f_\lambda)_{\lambda \in \mathfrak{P}_n}$ und $(s_\lambda)_{\lambda \in \mathfrak{P}_n}$. Um die Überlegungen zu vervollständigen, wollen wir auch Übergangsmatrizen für die Basis $(p_\lambda)_{\lambda \in \mathfrak{P}_n}$ in die anderen Basen angeben.

Notation 2.10. Sei $\lambda \in \mathfrak{P}_n$ mit $\text{len}(\lambda) = r$. Sei $f : \{1, \dots, r\} \rightarrow \mathbb{N}^+$. Dann definieren wir für $i \in \mathbb{N}^+$:

$$f(\lambda)_i = \sum_{j \in \mathbb{N}^+ : f(j)=i} \lambda_j$$

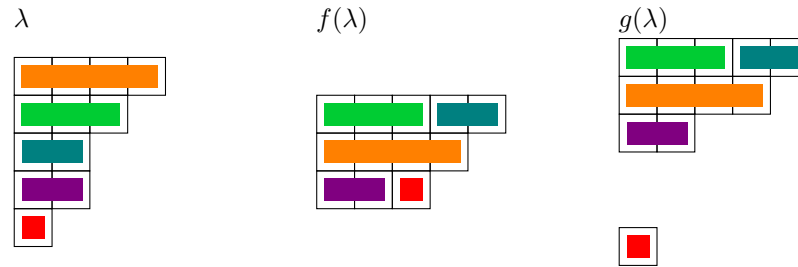
Bemerkung 2.11. $f(\lambda)$ muss nicht notwendigerweise eine Partition von λ sein. Wir interessieren uns jedoch nur für jene f , sodass $f(\lambda) \in \mathfrak{P}$ gilt.

Beispiel 2.12. Sei $\lambda = (432^21) \in \mathfrak{P}_{12}$. Dann ist $r = \text{len}(\lambda) = 5$. Seien $f, g : \{1, \dots, r\} \rightarrow \mathbb{N}^+$

gegeben durch:

j	1	2	3	4	5
$f(j)$	2	1	1	3	3
$g(j)$	2	1	1	3	6

Dann ist $g(\lambda) = (\lambda_2 + \lambda_3, \lambda_1, \lambda_4, 0, 0, \lambda_5, 0, \dots) = (5, 4, 2, 0, 0, 1, 0, \dots)$ keine Partition. Jedoch ist $f(\lambda) = (\lambda_2 + \lambda_3, \lambda_1, \lambda_4 + \lambda_5, 0, \dots) = (5, 4, 3, 0, 0, \dots) = (543)$ eine Partition von 12. Die Partition $f(\lambda)$ ist durch Zusammenfassen der Teile λ_2 und λ_3 sowie λ_4 und λ_5 entstanden.



Notation und Lemma 2.13. Sei $L := M(p, m)$. Dann ist $L_{\lambda, \mu}$ die Anzahl der $f : \{1, \dots, r\} \rightarrow \mathbb{N}^+$, sodass $f(\lambda) = \mu$.

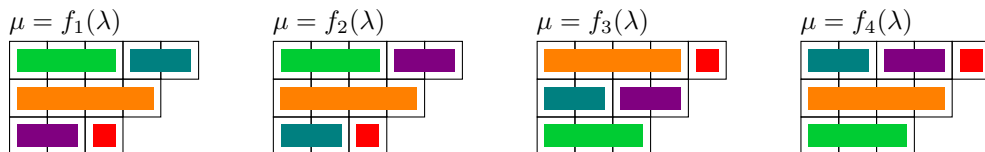
Beweis. Sei $r = \text{len}(\lambda)$. Multipliziert man $p_\lambda = \prod_{i=1}^r p_{\lambda_i}$ aus, erhält man eine Summe von Monomen:

$$p_\lambda = \sum_{f: \{1, \dots, r\} \rightarrow \mathbb{N}^+} \prod_{i=1}^r x_{f(i)}^{\lambda_i} = \sum_{f: \{1, \dots, r\} \rightarrow \mathbb{N}^+} x^{f(\lambda)}$$

□

Beispiel 2.14. Für $\lambda = (432^21)$ und $\mu = (543)$ ist $L_{\lambda, \mu} = 4$, da es vier Funktionen $f : \{1, \dots, r\} \rightarrow \mathbb{N}^+$ mit $f(\lambda) = \mu$ gibt:

j	1	2	3	4	5
$f_1(j)$	2	1	1	3	3
$f_2(j)$	2	1	3	1	3
$f_3(j)$	1	3	2	2	1
$f_4(j)$	2	3	1	1	1



Satz 2.15. L ist eine strikte untere Dreiecksmatrix.

Beweis. Sei $\mu = f(\lambda)$. Dann kann λ dargestellt werden als $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \nu_i$, wobei ν_i eine Partition von μ_i ist. In diesem Fall schreiben wir $\lambda \leq \mu$ (λ ist eine Verfeinerung von μ). Offensichtlich ist \leq eine Ordnungsrelation auf \mathfrak{P}_n . Es verbleibt zu zeigen, dass \leq stärker ist als \leq .

Sei $I_k = f(\{1, \dots, k\})$ für $k \in \{1, \dots, \text{len}(\lambda)\}$. Dann ist $|I_k| \leq k$ und mit der Definition $\mu_i = \sum_{j \in \mathbb{N}^+, f(j)=i} \lambda_j$ folgt:

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i \leq \sum_{i \in I_k} \mu_i \leq \sum_{i=1}^k \mu_k$$

□

Satz 2.16. Die Übergangsmatrizen zur Basis $(p_\lambda)_{\lambda \in \mathfrak{P}_n}$ haben folgende Gestalt:

- $M(p, e) = \varepsilon z L^*$
- $M(p, f) = \varepsilon L$
- $M(p, h) = z L^*$
- $M(p, s) = L K^{-1}$

Wobei ε bzw. z die Diagonalmatrizen mit Diagonale $(\varepsilon_\lambda)_{\lambda \in \mathfrak{P}_n}$ bzw. $(z_\lambda)_{\lambda \in \mathfrak{P}_n}$ sind, siehe auch Abschnitt 1.4.4.

Beweis. Die Basis $(h_\lambda)_{\lambda \in \mathfrak{P}_n}$ ist dual zu $(m_\lambda)_{\lambda \in \mathfrak{P}_n}$ und die Basis $(p_\lambda)_{\lambda \in \mathfrak{P}_n}$ ist dual zu $(z_\lambda^{-1} p_\lambda)_{\lambda \in \mathfrak{P}_n}$. Damit folgt mit Korollar 2.9 den Rechenregeln für duale Basen die Behauptung:

$$M(p, h) = M(z^{-1} p, m)^* = (z^{-1} L)^* = z L^*$$

$$M(p, e) = M(\omega p, \omega e) = M(\varepsilon p, h) = \varepsilon z L^*$$

$$M(p, f) = M(\omega p, \omega f) = M(\varepsilon p, m) = \varepsilon L$$

$$M(p, s) = M(p, m) M(s, m)^{-1} = L K^{-1}$$

□

2.1 Übergangsmatrizen für kleine Dimensionen mit SageMath

Für gegebenes $n \in \mathbb{N}$ können die für die Übergangsmatrizen nötigen Matrizen K und J mittels Computeralgebraprogramm `sage`[4] berechnet werden:

Partitionen von n , also die Menge \mathfrak{P}_n wird mit `Partitions(n)` generiert. Wenn man diese mit `.list()` in eine Liste umwandelt, werden sie standardmäßig in umgekehrter lexikographischer Reihenfolge sortiert.

Den Ring der symmetrischen Funktionen über einem Ring R erhält man mit `SymmetricFunctions(R)`.

Mit den Optionen `.s()`, `.h()`, `.p()`, `.e()`, `.m()`, `.f()` kann man eine Standardbasis festlegen. Dabei sind die Variablenbezeichnungen konsistent mit jenen aus dem Kapitel 1.4.

Um die Bezeichnungen über dem Ring $R = \mathbb{Q}\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen zu initialisieren, führen wir folgenden Code aus:

```
Sym = SymmetricFunctions(QQ) #Initialisation
s = Sym.s() #Schur basis
h = Sym.h() #homogeneous basis
p = Sym.p() #powersum basis
e = Sym.e() #elementary basis
m = Sym.m() #monomial basis
f = Sym.f() #forgotten basis
```

Möchte man die Übergangsmatrizen über einem anderen Ring bestimmen, ist `QQ` im obigen Code durch den entsprechenden anderen Ring zu ersetzen.

Ist die Standardbasis festgelegt, bekommt man mittels Einsetzen einer Partition mittels Klammernoperator (`partition`), wobei `partition` eine Partition von `n` ist, das entsprechende Basiselement.

Durch anwenden einer anderen Basis, also in unserem Fall durch `s(.)`, `h(.)`, `p(.)`, `e(.)`, `m(.)`, `f(.)` wobei `.` für das entsprechende symmetrische Polynom steht, kann man symmetrische Polynome in einer anderen Basis darstellen.

Beispiel 2.17.

```
Partitions(5)
```

```
Partitions of the integer 5
```

```
Partitions(5).list()
```

```
[5], [4, 1], [3, 2], [3, 1, 1], [2, 2, 1], [2, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1]
```

```
e(p([3,1,1]))
```

```
e[1, 1, 1, 1, 1] - 3*e[2, 1, 1, 1] + 3*e[3, 1, 1]
```

Um nun die Matrix K zu bestimmen, lesen wir systematisch die Koeffizienten mit `.coefficients()` aus. Um dies für alle Partitionen von `n` zu tun, iterieren mittels einer `for`-Schleife:

```
n = 5
```

```
[m(s(part)).coefficients() for part in Partitions(n)]
```

```
[[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1],
 [4, 3, 2, 2, 1, 1],
 [5, 3, 2, 1, 1],
 [6, 3, 1, 1],
 [5, 2, 1],
 [4, 1],
 [1]]
```

Die Koeffizienten werden in lexikographischer Reihenfolge ausgelesen, nicht wie gewünscht in umgekehrter lexikographischer Reihenfolge. Daher müssen wir die Listen umkehren. Ein weiterer Nachteil dieser Methode ist, dass verschwindende Koeffizienten nicht ausgegeben werden. Man kann die Nullen eliminieren, indem man zu jedem Koeffizienten eine Zahl addiert und anschließend subtrahiert, die in der Matrix nicht vorkommt. Beispielsweise ist $(n+1)^n$ größer als jeder Eintrag. Somit ergibt sich der folgende Code (ohne Zeilenumbruch):

```
[list(reversed([jj-(n+1)^n for jj in ii])) for ii in [m(s(part)+(n+1)^n*sum([
m(part) for part in Partitions(n)])).coefficients() for part in Partitions(n)]]
```

`sage` liefert eine Liste von Listen, die mittels `matrix(.)` in eine Matrix umgewandelt werden kann.

Durch Ersetzen von `m` und `s` durch andere Basen und geeignete Wahl von `n` können mit dieser Methode beliebige Übergangsmatrizen bestimmt werden. Im Folgenden sind die Übergangsmatrizen K und L bis zu $n=8$ tabellarisch angegeben, wobei die Zeilen und Spalten nach Partitionen in

absteigender lexikographischer Reihenfolge sortiert sind und Nulleinträge weggelassen wurden:

$$\begin{array}{c|c} n = 1 & 1 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cc} n = 2 & 2 & 1^2 \\ \hline & 2 & 1 \ 1 \\ & 1^2 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccc} n = 3 & 3 & 21 & 1^3 \\ \hline & 3 & 1 \ 1 & 1 \\ & 21 & 1 & 2 \\ & 1^3 & & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccc} n = 4 & 4 & 31 & 2^2 & 21^2 & 1^4 \\ \hline & 4 & 1 \ 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 31 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ & 2^2 & & 1 & 1 & 2 \\ & 21^2 & & & 1 & 3 \\ & 1^4 & & & & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccccc} n = 5 & 5 & 41 & 32 & 31^2 & 2^21 & 21^3 & 1^5 \\ \hline & 5 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 41 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ & 32 & & 1 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ & 31^2 & & & 1 & 1 & 3 & 6 \\ & 2^21 & & & & 1 & 2 & 5 \\ & 21^3 & & & & & 1 & 4 \\ & 1^5 & & & & & & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccccccc} n = 5 & 6 & 51 & 42 & 41^2 & 3^2 & 321 & 31^3 & 2^3 & 2^21^2 & 21^4 & 1^6 \\ \hline & 6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 51 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 3 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ & 42 & & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 3 & 4 & 6 & 9 \\ & 41^2 & & & 1 & & 1 & 3 & 1 & 3 & 6 & 10 \\ & 3^2 & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ & 321 & & & & & 1 & 2 & 2 & 4 & 8 & 16 \\ & 31^3 & & & & & & 1 & & 1 & 4 & 10 \\ & 2^3 & & & & & & & 1 & 1 & 2 & 5 \\ & 2^21^2 & & & & & & & & 1 & 3 & 9 \\ & 21^4 & & & & & & & & & 1 & 5 \\ & 1^6 & & & & & & & & & & 1 \end{array}$$

$n = 7$	7	61	52	51^2	43	421	41^3	$3^2 1$	32^2	321^2	31^4	$2^3 1$	$2^2 1^3$	21^5	1^7
7	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
61		1	1	2	1	2	3	2	2	3	4	3	4	5	6
52			1	1	1	2	3	2	3	4	6	5	7	10	14
51^2				1		1	3	1	1	3	6	3	6	10	15
43					1	1	1	2	2	3	4	4	6	9	14
421						1	2	1	2	4	8	6	11	20	35
41^3							1			1	4	1	4	10	20
$3^2 1$								1	1	2	3	3	6	11	21
32^2									1	1	2	3	5	10	21
321^2										1	3	2	6	15	35
31^4											1		1	5	15
$2^3 1$												1	2	5	14
$2^2 1^3$													1	4	14
21^5														1	6
1^7															1

$n = 8$	8	71	62	61^2	53	521	51^3	4^2	431	42^2	421^2	41^4	$3^2 2$	$3^2 1^2$	$32^2 1$	321^3	31^5	2^4	$2^3 1^2$	$2^2 1^4$	21^6	1^8	
8	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
71		1	1	2	1	2	3	1	2	2	3	4	2	3	3	4	5	3	4	5	6	7	
62			1	1	1	2	3	1	2	3	4	6	3	4	5	7	10	6	8	11	15	20	
61^2				1		1	3		1	1	3	6	1	3	3	6	10	3	6	10	15	21	
53					1	1	1	1	2	2	3	4	3	4	5	7	10	6	9	13	19	28	
521						1	2		1	2	4	8	2	4	6	11	20	8	14	24	40	64	
51^3							1				1	4		1	1	4	10	1	4	10	20	35	
4^2								1	1	1	1	1	1	2	2	3	4	3	4	6	9	14	
431									1	1	2	3	2	4	5	9	15	7	13	23	40	70	
42^2										1	1	2	1	1	3	5	10	6	9	16	30	56	
421^2											1	3		1	2	6	15	3	9	21	45	90	
41^4												1				1	5		1	5	15	35	
$3^2 2$													1	1	2	3	5	3	6	11	21	42	
$3^2 1^2$														1	1	3	6	2	5	12	26	56	
$32^2 1$															1	2	5	3	6	13	30	70	
321^3																1	4		2	8	24	64	
31^5																	1			1	6	21	
2^4																		1	1	2	5	14	
$2^3 1^2$																			1	3	9	28	
$2^2 1^4$																				1	5	20	
21^6																					1	7	
1^8																						1	

$n = 1$	1
1	1

$n = 2$	2	1^2
2	1	
1^2	1	2

$n = 3$	$3 \ 21 \ 1^3$
3	1
21	$1 \ 1$
1^3	$1 \ 3 \ 6$

$n = 4$	$4 \ 31 \ 2^2 \ 21^2 \ 1^4$
4	1
31	$1 \ 1$
2^2	$1 \ 2$
21^2	$1 \ 2 \ 2 \ 2$
1^4	$1 \ 4 \ 6 \ 12 \ 24$

$n = 5$	$5 \ 41 \ 32 \ 31^2 \ 2^21 \ 21^3 \ 1^5$
5	$1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$
41	$1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$
32	$1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$
31^2	$1 \ 2 \ 1 \ 2 \ 0 \ 0 \ 0$
2^21	$1 \ 1 \ 2 \ 0 \ 2 \ 0 \ 0$
21^3	$1 \ 3 \ 4 \ 6 \ 6 \ 6 \ 0$
1^5	$1 \ 5 \ 10 \ 20 \ 30 \ 60 \ 120$

$n = 5$	$6 \ 51 \ 42 \ 41^2 \ 3^2 \ 321 \ 31^3 \ 2^3 \ 2^21^2 \ 21^4 \ 1^6$
6	$1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$
51	$1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$
42	$1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$
41^2	$1 \ 2 \ 1 \ 2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$
3^2	$1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$
321	$1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 2 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$
31^3	$1 \ 3 \ 3 \ 6 \ 2 \ 3 \ 6 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$
2^3	$1 \ 0 \ 3 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 6 \ 0 \ 0 \ 0$
2^21^2	$1 \ 2 \ 3 \ 2 \ 4 \ 4 \ 0 \ 6 \ 4 \ 0 \ 0$
21^4	$1 \ 4 \ 7 \ 12 \ 8 \ 16 \ 24 \ 18 \ 24 \ 24 \ 0$
1^6	$1 \ 6 \ 15 \ 30 \ 20 \ 60 \ 120 \ 90 \ 180 \ 360 \ 720$

$n = 7$	7	61	52	51^2	43	421	41^3	3^21	32^2	321^2	31^4	2^31	2^21^3	21^5	1^7
7	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
61	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
52	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
51^2	1	2	1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
43	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
421	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
41^3	1	3	3	6	1	3	6	0	0	0	0	0	0	0	0
3^21	1	1	0	0	2	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0
32^2	1	0	2	0	1	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0
321^2	1	2	2	2	3	2	0	4	2	2	0	0	0	0	0
31^4	1	4	6	12	5	12	24	8	6	12	24	0	0	0	0
2^31	1	1	3	0	3	3	0	0	6	0	0	6	0	0	0
2^21^3	1	3	5	6	7	9	6	12	14	12	0	18	12	0	0
21^5	1	5	11	20	15	35	60	40	50	80	120	90	120	120	0
1^7	1	7	21	42	35	105	210	140	210	420	840	630	1260	2520	5040

$n = 8$	8	71	62	61^2	53	521	51^3	4^2	431	42^2	421^2	41^4	3^22	3^21^2	32^21	321^3	31^5	2^4	2^31^2	2^21^4	21^6	1^8	
8	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
71	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
62	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
61^2	1	2	1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
53	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
521	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
51^3	1	3	3	6	1	3	6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4^2	1	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
431	1	1	0	0	1	0	0	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
42^2	1	0	2	0	0	0	0	2	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
421^2	1	2	2	2	2	2	0	2	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
41^4	1	4	6	12	4	12	24	2	4	6	12	24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3^22	1	0	1	0	2	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3^21^2	1	2	1	2	2	0	0	4	4	0	0	0	2	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0
32^21	1	1	2	0	3	2	0	2	1	2	0	0	4	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0
321^3	1	3	4	6	5	6	6	6	9	6	6	0	8	12	6	6	0	0	0	0	0	0	0
31^5	1	5	10	20	11	30	60	10	25	30	60	120	20	40	30	60	120	0	0	0	0	0	0
2^4	1	0	4	0	0	0	0	6	0	12	0	0	0	0	0	0	0	24	0	0	0	0	0
2^31^2	1	2	4	2	6	6	0	6	6	12	6	0	12	0	12	0	0	24	12	0	0	0	0
2^21^4	1	4	8	12	12	20	24	14	28	32	36	24	40	48	56	48	0	72	72	48	0	0	0
21^6	1	6	16	30	26	66	120	30	90	120	210	360	140	240	300	480	720	360	540	720	720	0	0
1^8	1	8	28	56	56	168	336	70	280	420	840	1680	560	1120	1680	3360	6720	2520	5040	10080	20160	40320	0

Kapitel 3

Anwendungen symmetrischer Funktionen

3.1 Lösen von Polynomgleichungen, Satz von Vietá

Sei $P(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i \in K[x]$ ein normiertes Polynom in einer Variablen und $m = \deg(P)$ der Grad des Polynoms. Sei \hat{K} der Zerfällungskörper von K . Dann gibt es n nicht notwendigerweise verschiedene Nullstellen $n_1, \dots, n_m \in \hat{K}$ von P mit $P(n_i) = 0$ für alle $i \in \{1, \dots, m\}$. Aus dem Hauptsatz der Galoistheorie kann gefolgert werden, dass für $m \geq 5$ diese Nullstellen im Allgemeinen nicht durch (nicht notwendigerweise ganze) Potenzen, Summen und Produkte darstellbar sind.

Es gilt jedoch

$$P(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i = \prod_{j=1}^m (x - n_j)$$

Durch Ausmultiplizieren und Koeffizientenvergleich bzw. mit dem Satz von Vietá folgt

$$e_i(n_1, \dots, n_m) = (-1)^i a_{m-i} \quad \forall i \in \{0, \dots, m\}$$

Aus den Koeffizienten des Polynoms lässt sich damit direkt auf den Wert der Elementarsymmetrischen Polynome, wenn man die Nullstellen einsetzt, schließen. Mit obigen Überlegungen kann man daraus den Wert jedes symmetrischen Polynoms in den Nullstellen bestimmen, welcher insbesondere in K liegt.

3.2 Analyse von Bézier-Kurven

Dieser Abschnitt ist an [5] angelehnt, in dem Bézierkurven über reellen Vektorräumen behandelt werden. Wir können die Theorie großteils auf Körper K und K -Vektorräume bzw. teilweise auf kommutative Ringe R und R -Moduln verallgemeinern.

Definition 3.1 (Multiaffine symmetrische Abbildung). Sei R ein Ring, $n, d \in \mathbb{N}$. Eine Abbildung $F : R^n \rightarrow R^d$ heißt multiaffin symmetrisch, wenn F symmetrisch ist und es gilt für $\alpha, c, d, t_2, \dots, t_n \in R$:

$$F((1 - \alpha)c + \alpha d, t_2, \dots, t_n) = (1 - \alpha)F(c, t_2, \dots, t_n) + \alpha F(d, t_2, \dots, t_n)$$

Bemerkung 3.2. Ist F multiaffin symmetrisch, so gilt insbesondere für $t_1, \dots, t_n, \alpha, c, d \in R$ und $i \in \{1, \dots, n\}$:

$$F(t_1, \dots, t_{i-1}, (1-\alpha)c + \alpha d, t_{i+1}, \dots, t_n) = (1-\alpha)F(t_1, \dots, t_{i-1}, c, t_{i+1}, \dots, t_n) + \alpha F(t_1, \dots, t_{i-1}, d, t_{i+1}, \dots, t_n)$$

Satz 3.3. Für $d = 1$ und $R = K$ ein Körper bilden die elementarsymmetrischen Funktionen bzw. elementarsymmetrischen Polynome in n Variablen $(e_i | i \in \{0, \dots, n\})$ eine Basis des Vektorraums der multiaffinen symmetrischen Funktionen.

$$\mathbb{S}_n = \{F : K^n \rightarrow K \text{ multiaffin symmetrisch}\}$$

Beweis. Offensichtlich sind Linearkombinationen von multiaffinen symmetrischen Funktionen multiaffin symmetrisch. Damit ist \mathbb{S}_n ein Vektorraum. Es ist leicht zu sehen, dass die elementarsymmetrischen Funktionen multiaffin symmetrisch sind. In Abschnitt 1.4.2 haben wir gesehen, dass die elementarsymmetrischen Funktionen algebraisch unabhängig sind. Insbesondere sind sie linear unabhängig. Damit ist $(e_i | i \in \{0, \dots, n\})$ ein linear unabhängiges System von $n + 1$ Vektoren in \mathbb{S}_n .

Wir stellen fest, dass eine multiaffine symmetrische Funktion $F \in \mathbb{S}_n$ eindeutig durch das Bild der $n + 1$ Vektoren $v_i = (\underbrace{1, \dots, 1}_i, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-i})$ für $i \in \{0, \dots, n\}$ dargestellt werden kann:

Sei $t_1, \dots, t_n \in K$. Mehrfache Anwendung von 3.2 liefert:

$$F(t_1, \dots, t_n) = \sum_{i_1, \dots, i_n \in \{0, 1\}} \left(\prod_{j=1}^n t_j^{i_j} (1 - t_j)^{1 - i_j} \right) F(i_1, \dots, i_n)$$

Aufgrund der Symmetrie gilt $F(i_1, \dots, i_n) = F(v_i)$ mit $i = \sum_{j=1}^n i_j$. Damit ist $\dim(\mathbb{S}_n) = n + 1$ und $(e_i | i \in \{0, \dots, n\})$ ist eine Basis. \square

Bemerkung 3.4. Würden wir nicht fordern, dass R ein Körper ist, wüssten wir lediglich, dass $(e_i | i \in \{0, \dots, n\})$ ein linear unabhängiges System des R -Moduls \mathbb{S}_n ist.

Definition 3.5 (Polarform eines Polynoms). Sei $f(t) = \sum_{i=0}^n a_i t^i \in K[t]$ ein Polynom mit $\deg(f) \leq n$. Dann ist die *Polarform von f* die multiaffine symmetrische Funktion

$$F(t_1, \dots, t_n) = \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{\binom{n}{i}} e_i(t_1, \dots, t_n)$$

Es ist leicht zu sehen, dass mit dieser Definition $F(t, \dots, t) = f(t)$ gilt. Wir wollen diese Definitionen auf beliebige $d \in \mathbb{N}$ verallgemeinern.

Definition 3.6 (Polarform einer polynomiellen Kurve). Sei $\mathbf{f} = \mathbf{f}(t) = \sum_{i=0}^n t^i \mathbf{a}_i \in K^d[t]$ mit Grad $\deg(\mathbf{f}) \leq n$. Dann heißt \mathbf{f} eine polynomielle Kurve. Die Summe ist komponentenweise zu verstehen, die Koeffizienten \mathbf{a}_i sind Vektoren in K^d .

Dann existiert eine vektorwertige multiaffine symmetrische Funktion

$$\mathbf{F} : \begin{array}{ccc} K^n & \rightarrow & K^d \\ (t_1, \dots, t_n) & \mapsto & \mathbf{F}(t_1, \dots, t_n) \end{array}$$

mit $\mathbf{F}(t, \dots, t) = \mathbf{f}(t)$. Diese Funktion \mathbf{F} heißt *Polarform der polynomiellen Kurve \mathbf{f}* .

Da jede Komponente der Funktion \mathbf{f} ein Polynom in t ist, erhalten wir mit 3.3, dass $(e_i | i \in \{0, \dots, n\})^d$ eine Basis des Raums der vektorwertigen multiaffinen symmetrischen Funktionen $\mathbb{S}_n^d = \{\mathbf{F} : K^n \rightarrow K^d \text{ multiaffin symmetrisch}\}$. Damit gilt $\dim(\mathbb{S}_n^d) = (n+1)^d$.

Satz 3.7 (Kontrollpunkte einer polynomiellen Kurve). Sei $\mathbf{f} = \mathbf{f}(t) = \sum_{i=0}^n t^i \mathbf{a}_i \in K^d[t]$ eine polynomielle Kurve mit Polarform \mathbf{F} . Seien $a, b \in K$. Das Kontrollpolygon $\{\mathbf{b}_i | i \in \{0, \dots, n\}\}$ der Bézierkurve bezüglich der Grenzen a und b , die mit \mathbf{f} übereinstimmt, erhalten wir mittels

$$\mathbf{b}_i = \mathbf{F}(\underbrace{a, \dots, a}_{n-i}, \underbrace{b, \dots, b}_i)$$

Bemerkung 3.8 (de Casteljau Algorithmus). Die rekursive Definition der Punkte des Kontrollpolygons $\mathbf{b}_i^0 = \mathbf{a}_i$ für $i \in \{0, \dots, n\}$ und $\mathbf{b}_i^r = (1-t)\mathbf{b}_i^{r-1} + t\mathbf{b}_{i+1}^{r-1}$ für $r \in \{1, \dots, n\}, i \in \{0, \dots, n-r\}$ nennt man den *de Casteljau Algorithmus*. Mittels Induktion kann man zeigen:

$$\mathbf{b}_i^r = \mathbf{F}(\underbrace{a, \dots, a}_{n-i-r}, \underbrace{t, \dots, t}_r, \underbrace{b, \dots, b}_i)$$

Damit folgt $\mathbf{b}_0^n = \mathbf{F}(t, \dots, t) = \mathbf{f}(t)$.

Auf reellen Intervallen können wir polynomielle Kurven, sowie deren Kontrollpolygon visualisieren:

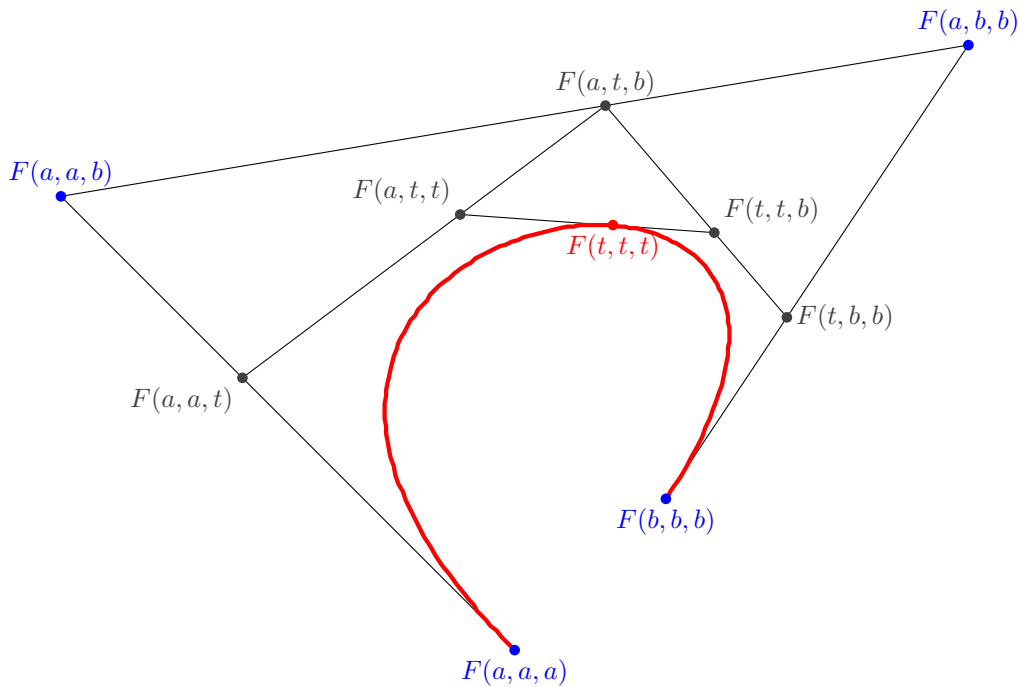


Abbildung 3.1: Kontrollpolygon einer polynomiellen Kurve auf einem Intervall $[a, b]$

Literaturverzeichnis

- [1] Baur, K.: *Symmetrische Funktionen*. Vorlesungsskriptum, 2009.
- [2] Fuchs, A.: *Symmetrische Polynome*. Diplomarbeit, BRG Schloss Wagrain, 2011.
- [3] Macdonald, I.G.: *Symmetric Functions and Hall Polynomials*. Oxford Science Publications, 1979, 1995.
- [4] SageMath: *SageMath, Version 6.9*, October 2015. <http://www.sagemath.org/de/>.
- [5] W. Dietrich, A. Gfrerrer, M. Hirz, J. Lang: *Integrated Computer-Aided Design in Automotive Development*. Springer, 2013.